Chainette

On se donne un cable de poids ω N par m.

Le segment [OP] ($P(x,y)$) du cable est soumis aux forces : $\vec{H}$, constante due à [OQ], $\vec{T}$, tension de OP et $\vec{W}$, poids de OP.

Puisque OP est en équilibre, la somme des composantes horizontales de ces forces et la somme de leurs composantes verticales sont nulles.

D'où : $T\cos\alpha = H$, $\quad T\sin\alpha = W \quad$ et ainsi $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{W}{H}$.

Notant s la longueur de OP, on a $W = \omega s$ et donc :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx} = \frac{\omega}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{\omega}{H}\sqrt{1+(dy/dx)^2} \quad . \qquad \text{(rectification de OP)}$$

Posant $p = dy/dx$, il vient : $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{\omega}{H}\sqrt{1+p^2}$, soit : $\dfrac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \dfrac{\omega}{H}dx$.

$$\int_0^p \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int_0^x \frac{\omega}{H}du \ , \quad \operatorname{argsh} p = \frac{\omega}{H}x \quad , \quad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh}\frac{\omega}{H}x \quad ,$$

$$dy = \operatorname{sh}\frac{\omega}{H}x\,dx \quad , \quad \int_0^y du = \int_0^x \operatorname{sh}\frac{\omega}{H}u\,du \quad , \quad \underline{y = \frac{H}{\omega}\left(\operatorname{ch}(\frac{\omega}{H}x) - 1\right)} \quad ,$$

équation d'une chainette.